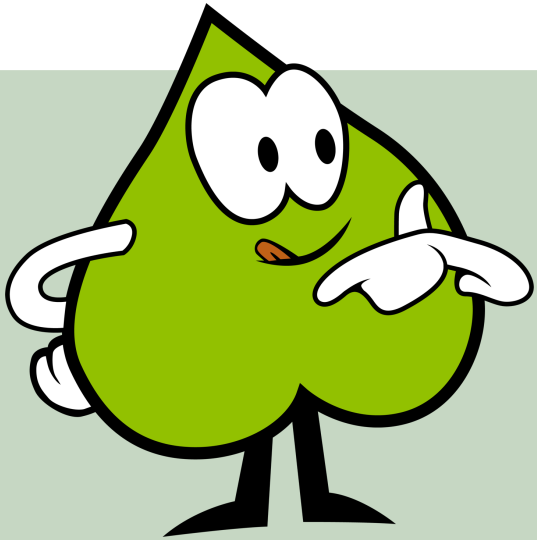
PIKAS
Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen



„Was? Wie? Warum?“

Beim Beschreiben & Begründen unterstützen

Juni 2025, PIKAS *(pikas.dzlm.de)*

Karten-Übersicht

Eigene Beschreibungen vornehmen

1 Bilder & Handlungen beschreiben
2 Vorgehensweisen beschreiben
3 Zusammenhänge beschreiben

Über Beschreibungen sprechen

4 Beschreibungen umsetzen
5 Beschreibungen zuordnen
6 Beschreibungen diskutieren & weiterentwickeln

Eigene Begründungen vornehmen

7 Vorgehensweisen begründen
8 Zusammenhänge begründen
9 Vollständigkeit begründen

Über Begründungen sprechen

10 Begründungen nachvollziehen
11 Begründungen identifizieren
12 Begründungen diskutieren & weiterentwickeln

Beschreiben & Begründen

13 Auf Stimmigkeit prüfen
14 Aussagen überprüfen
15 Veränderungen beschreiben & begründen
16 Aussagen verallgemeinern

Projekt **PIKAS** in Kooperation mit dem Projekt **QuaMath**

quamath.de
pikas.dzlm.de

Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik / IEEM
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

Abbildungen & Gestaltung: Karoline Mosen
Druck: Wentker Druck GmbH, Greven
Stand: Juni 2025

Auf manchen Karten dieser Kartei wird die Grundschrift des Grundschulverbands e.V. und der Wissenschaftlichen Einrichtung der Laborschule Bielefeld genutzt.

Dieses Material wurde für das Projekt PIKAS des Deutschen Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM) in Kooperation mit dem Projekt **QuaMath** konzipiert und kann, soweit nicht anders gekennzeichnet, unter der **Creative Commons Lizenz BY-NC-SA: Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International** weiterverwendet werden. Das bedeutet: Alle Folien und Materialien können, soweit nicht anders gekennzeichnet, genutzt und verändert werden, wenn die Urheber genannt, die Quellenhinweise aufgeführt bleiben, eine nicht-kommerzielle Nutzung erfolgt sowie das bearbeitete Material unter der gleichen Lizenz weitergegeben wird (*https://creativecommons.org/licenses*).

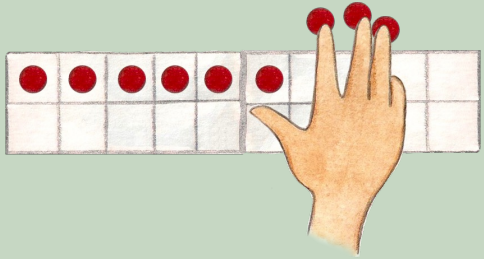
Bilder & Handlungen beschreiben

Welche Aufgabe(n) kannst du hier (hinein)sehen?

Anlass: **Bild**



Anlass: **Handlung**



Ziel der Beschreibung von Bildern und Handlungen

Die Gegenstände der Mathematik sind abstrakt. Auch die grundschulspezifischen Fachausdrücke *plus, minus, mal* und *geteilt* erklären nicht, wie die Operationen gedacht werden können. Sie werden erst durch die Deutungen von Handlungen und Bildern verständlich. Daher gilt es, Darstellungen kontinuierlich zu vernetzen, um …

- Zusammenhänge zwischen den anschaulichen Darstellungsformen zu erklären („Warum passt das?“).
- Mehrdeutigkeiten von anschaulichen Darstellungen zu artikulieren.
- Vereinbarungen für gemeinsame Deutungen zu treffen.
- (Operations-)Vorstellungen aufzubauen.

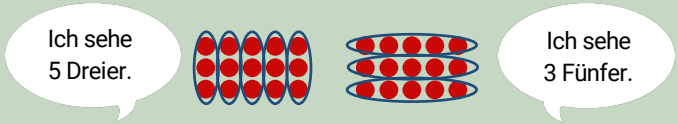
Beispielhafte Impulse

- Finde die Aufgabe im Bild.
- Welche Minusaufgabe zeigt das Kind?
- Ein anderes Kind sagt: „Zum Bild passt auch 3 + 3 + 3.“
- Welche weiteren Aufgaben könntest du hier noch in das Bild hineinsehen?
- Wie viele sind es? Bilde eine Plusaufgabe mit gleichen Zahlen. Was siehst du?
- Was müsstest du tun, damit die Aufgabe 9 – 5 passt?
- Wie müsstest du das Bild verändern, damit es zur Aufgabe 2 · 3 passt?

Bilder & Handlungen beschreiben

Unterstützungsangebote für das Beschreiben von Bildern & Handlungen

- den abstrakten, mathematischen Begriff in die Bilder und Handlungen hineinsehen, z. B. „Welche Plusaufgaben entdeckst du?“
- Mehrdeutigkeiten von Abbildungen in den Blick nehmen, z. B. „Finde weitere Aufgaben.“



- die gefundenen Aufgaben kennzeichnen, z. B. mit Mitteln zum Forschen oder Markierungen
- abschließend Vereinbarungen über gemeinsame Deutungen treffen, z. B. „Plättchen abzudecken bedeutet Minusrechnen.“

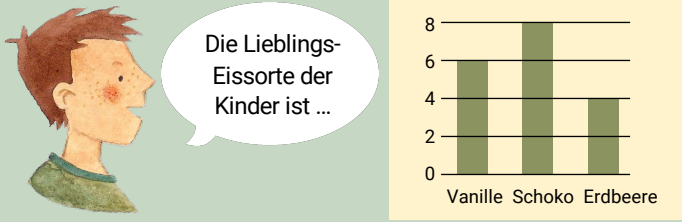
Wichtiges

- Bei der Beschreibung von Bildern und Handlungen werden Kinder zunächst alltagssprachliche Ausdrücke (*austrinken, aussteigen, weglaufen, aufessen, …*) verwenden. Diese werden zunehmend in bedeutungsbezogenen Sprachmitteln (*wegnehmen, dazulegen, …*) zusammengefasst. Auch hierbei kann das Handeln am Material helfen.
- Tragfähige Darstellungen als Argumentations- und Kommunikationsmittel machen mathematische Strukturen und Zusammenhänge sichtbar und ermöglichen das Kommunizieren über diese.

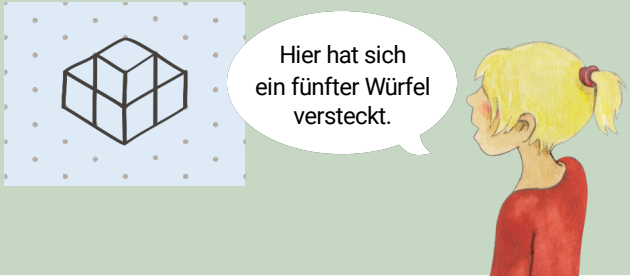
Weitere Anlässe für das Beschreiben von Bildern & Handlungen

Der Aufbau von Vorstellungen bedarf der kontinuierlichen Vernetzung von Darstellungen, z. B. bei …

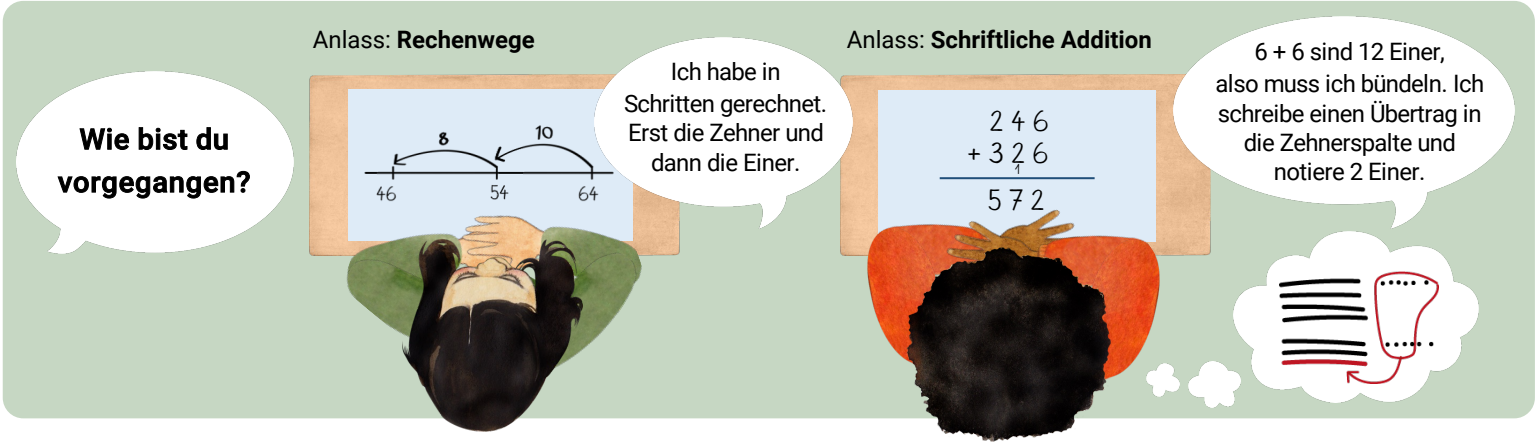
- Rechengeschichten („Erfinde eine Rechengeschichte, die zum Bild / zur Handlung / zur Aufgabe passt.“)
- Aufgabenformaten wie *Zahl unter der Lupe / Zahl des Tages*
- Wimmelbildern („Finde einen Bildausschnitt, der zur Aufgabe 2 + 4 passt. Warum passt das zusammen?“)
- dem Ablesen von Informationen aus Diagrammen



- dreidimensionalen Darstellungen von Würfelgebäuden.



Vorgehensweisen beschreiben



Ziel der Beschreibung von Vorgehensweisen

In der Auseinandersetzung mit neuen (geschickten oder vorteilhaften) Vorgehensweisen ist ein Austausch über diese essentiell, um ...

- zu verdeutlichen, dass oftmals verschiedene Vorgehensweisen möglich und denkbar sind.
- das eigene (strategische) Wissen zu erweitern (*„Wie hätte ich noch vorgehen können?“*).
- langfristig ggf. umständliche Vorgehensweisen durch immer geschicktere Vorgehensweisen zu ersetzen.

Beispielhafte Impulse

- Zeige, wie du vorgegangen bist. Was hast du dir überlegt?
- Was ist bei den verschiedenen Vorgehensweisen gleich? (z. B. „Welche Rechenschritte kommen in beiden Rechenwegen vor?“)
- Was ist bei den Vorgehensweisen verschieden? (z. B. „An welchen Stellen unterscheiden sich eure Vorgehensweisen?“)
- Sind alle Vorgehensweisen richtig?

Vorgehensweisen beschreiben

Unterstützungsangebote für das Beschreiben von Vorgehensweisen

- die eigene Vorgehensweise mit Material darstellen und am Material erklären
- die einzelnen Bearbeitungsschritte bewusst machen („Was hast du zuerst gemacht? Was hast du dann gemacht?“)
- Beschreibungen anderer zuhören, mit der eigenen vergleichen und Anregungen für eigene Beschreibungen bekommen
- Beschreibungen von Vorgehensweisen durch andere Kinder nachvollziehen lassen und prüfen („Beschreibe einem anderen Kind, wie du am Rechenstrich gerechnet hast. Das andere Kind zeigt deine Vorgehensweise am Rechenstrich. Vergleicht.“)

Wichtiges

- Das Beschreiben von Vorgehensweisen schafft nicht immer auch automatisch einen Anlass zum Begründen. Fragen wie „Warum bist du so vorgegangen?“ oder „Warum hast du das so gemacht?“ führen lediglich zu einer Rechtfertigung („Weil das mein Lieblingsrechenweg ist.“ oder „Weil ich besonders gut nachgedacht habe.“) und nicht zu einer mathematischen Begründung.
- Für das Beschreiben von Vorgehensweisen ist das Visualisieren absolut zentral, damit auch andere Kinder die Vorgehensweisen nachvollziehen und aufnehmen können.

Weitere Anlässe für das Beschreiben von Vorgehensweisen

Rechenwege beschreiben, z. B. bei …

- Ableitungen („Für 9 + 3 hilft mir 10 + 3. Das sind 13. Und dann nehme ich noch einen weg.“)
- halbschriftlichen Rechenstrategien
- schriftlichen Rechenverfahren („Ich addiere 9 Einer und 6 Einer. Das sind zusammen 15 Einer oder 5 Einer und 1 Zehner. Ich übertrage den einen Zehner.“)

Problemlösestrategien beschreiben, z. B. bei …

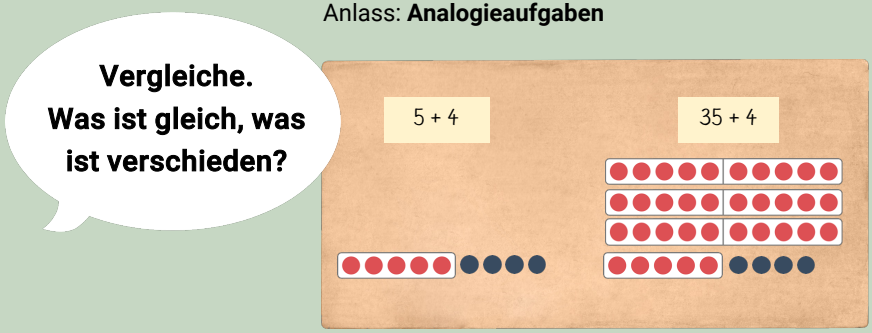
- „Finde alle“-Aufgabenstellungen („Finde alle Zahlenmauern mit dem Deckstein 6. Wie bist du vorgegangen?“)
- „Setze fort“-Aufgabenstellungen („Beschreibe, wie du vorgegangen bist. Was hast du dir überlegt?“)

Zusammenhänge von Darstellungen, die verschiedene Vorgehensweisen zeigen, beschreiben, z. B. …

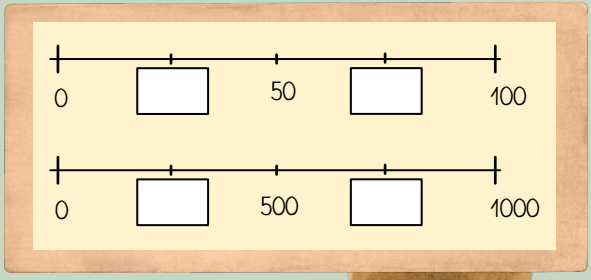
- in verschiedenen Darstellungen die gleiche Vorgehensweise erkennen („Beide Kinder haben 63 + 15 in Schritten gerechnet. Das eine Kind hat erst die Zehnerstange dazugelegt und dann die Einerwürfel, das andere Kind hat am Rechenstrich erst einen Zehnersprung gemacht und dann noch einen Fünfersprung.“)

Zusammenhänge beschreiben

Anlass: **Analogieaufgaben**



Anlass: **Rechenstrich**



Ziel der Beschreibung von Zusammenhängen

Nicht allen Kindern sind mathematische Zusammenhänge (z. B. zwischen Aufgaben und Darstellungen) unmittelbar bewusst. Daher ist es wichtig, sie sichtbar zu machen, um ...

- sie als Rechenvorteile nutzbar zu machen.
- bereits Gesichertes in neuen Kontexten, Darstellungen etc. zu erkennen.
- langfristiges Lernen transparent zu machen („Das kenne ich schon!“, „Das brauche ich immer wieder!“).

Beispielhafte Impulse

- Zeige das, was gleich ist.
- Was verändert sich vom einen zum anderen? (z. B. „Was kommt zu 5 + 4 hinzu?“)
- Wo steckt das eine im anderen? (z. B. „Wo siehst du die einfache Aufgabe in der schwierigen Aufgabe?“)
- (Wie) Kannst du das eine für das andere nutzen? (z. B. „Wenn 50 die Mitte zwischen 0 und 100 ist, was heißt das für den zweiten Rechenstrich?“)
- Stelle die Aufgabe(n) mit Material dar und zeige die Veränderung! (z. B. „Mache aus der Aufgabe 4 + 5 die neue Aufgabe.“)

Zusammenhänge beschreiben

Unterstützungsangebote für das Beschreiben von Zusammenhängen

- das Gemeinsame in den Fokus rücken, z. B. mit Gesten verdeutlichen, mit einem Stift farblich kennzeichnen
- den Unterschied in den Fokus rücken, z. B. farblich hervorheben, mit Pfeilen markieren
- die Veränderung mit Material (nach-)vollziehen, z. B. „Aus … wird …“ oder „Aus … mache …“

Wie verändert sich der Flächeninhalt?



Wichtiges

Das Beschreiben von Zusammenhängen schafft auch Begründungsanlässe („Warum ist das so?“).

Das „Eine“ in dem „Anderen“ wahrzunehmen, kann sehr verschieden sein, z. B.:

- die „einfache“ Aufgabe in der „schwierigen“
- die vorherige Zahl/Aufgabe in der nachfolgenden
- das „Kleine“ in dem „Großen“
- das „bereits Bekannte“ in dem „Neuen“
- das „Äußere“ im „Inneren“ etc.

Weitere Anlässe für das Beschreiben von Zusammenhängen

Zusammenhänge in Aufgabenserien betrachten, z. B. in …

- schönen Päckchen
- Zahlenmauern
- Rechendreiecken

Zahlbeziehungen betrachten, z. B. …

- Zahlen verdoppeln und halbieren
- Teiler einer Zahl
- Zahlzerlegungen

Zusammenhänge von/in Darstellungen betrachten, z. B. …

- in Wimmelbilder Aufgaben hineinsehen
- Informationen von Säulendiagramm und Tabelle aufeinander beziehen

Zusammenhänge als strategisches Werkzeug nutzen, z. B. …

- Veränderungen von Würfelgebäuden durch Umlegen eines Würfels
- Erkennen von Gemeinsamkeiten bei verschiedenen Streichholzvierlingen mit dem Ziel, ein Holz zu versetzen

Die Streichholz-Vierlinge stimmen in 3 Hölzern überein.

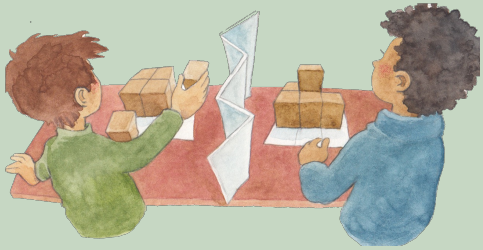


Beschreibungen umsetzen

Anlass: **Würfelgebäude nachbauen**

Was beschreiben die Kinder?

Den nächsten Würfel legst du …



Anlass: **Zahlenrätsel**

Esra
Ich denke mir eine Zahl.
Wenn ich sie halbiere,
erhalte ich 13.
Wie heißt meine Zahl?

Ziel des Umsetzens von Beschreibungen

Im Mittelpunkt steht die Sprachrezeption, da die Kinder Handlungsanweisungen anderer nachvollziehen, aber vor allem umsetzen müssen, um …

- neue Denk- und Vorgehensweisen kennenzulernen und sich in diese einzudenken.
- diese ggf. für das eigene, geschickte Vorgehen zu nutzen.
- die Wichtigkeit einer gemeinsamen Sprache beim Mathematiklernen zu erfahren.
- die Nachvollziehbarkeit von Beschreibungen reflektieren zu können.

Beispielhafte Impulse

- Was beschreiben die Kinder?
  Beschreibe es nochmal mit eigenen Worten.
- Was an der Beschreibung des anderen Kindes verstehst du gut?
  Was bereitet dir noch Schwierigkeiten?
- Mache das, was die Kinder beschreiben.
- Vergleiche: Wie hast du es gemacht?
  Wie hat das Kind es gemacht?
- Wie kannst du das, was das Kind beschreibt, selbst nutzen?

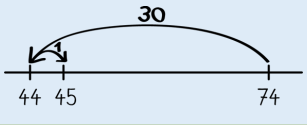
Beschreibungen umsetzen

Unterstützungsangebote für das Umsetzen von Beschreibungen

- Bezug zu eigenen Denk- und Vorgehensweisen ermöglichen, z. B. durch vorheriges Lösen auf eigenen Wegen
- Verstandenes in den Blick nehmen, z. B. durch Erklären in eigenen Worten oder Darstellen mit anderen Darstellungsformen

74 – 29 = 45
74 – 30 = 44
44 + 1 = 45

Zeige es nochmal am Rechenstrich.



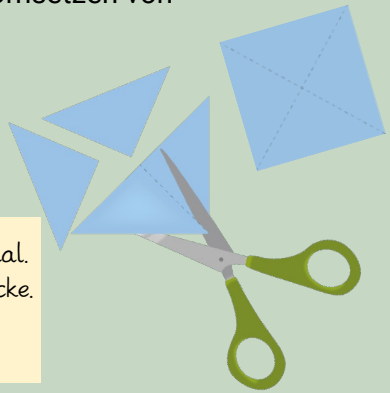
- Vergleich des Resultats der Handlung mit der Beschreibung („Sieht mein Würfelgebäude aus wie deins?“)

Wichtiges

- Die Wichtigkeit einer gemeinsamen (einer geteilten) Sprache im Mathematikunterricht wird vor allem dann deutlich, wenn die Handlungsergebnisse am Ende nicht übereinstimmen.
- Fremde Beschreibungen können als Sprachvorbilder dienen („Warum konntest du die Beschreibung gut verstehen?“, „Wie kannst du das nutzen?“).

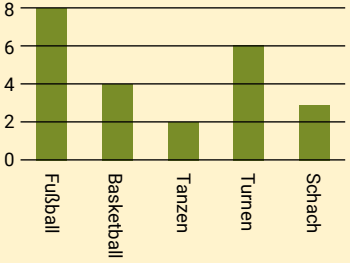
Weitere Anlässe für das Umsetzen von Beschreibungen

- Zeichenanleitungen
- Wege auf Plänen
- Faltanleitungen umsetzen



1. Falte das Quadrat diagonal.
2. Zerschneide es in 4 Dreiecke.
3. Lege Rechtecke mit den Dreiecken.

- Veränderungen an der Stellentafel vornehmen
- Diagrammen Informationen entnehmen



Basketball wurde halb so häufig genannt wie Fußball, aber doppelt so häufig wie Turnen.

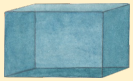
8 Kinder haben Fußball als Lieblingshobby.

Beschreibungen zuordnen

Was passt?

Anlass: **Geometrische Körper**

Welche Beschreibung passt zu diesem Körper?



☐ Ich habe 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen. Meine Flächen sind alle gleich groß.

☒ Ich habe 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen. Die Kanten sind nicht alle gleich lang.

Anlass: **Schöne Päckchen**

Die erste Zahl bleibt gleich. Die zweite Zahl wird um 1 kleiner. Das Ergebnis wird um 1 größer.

☒
28 – 13 = 15
28 – 12 = 16
28 – 11 = 17
28 – 10 = 18

☐
28 – 13 = 15
28 – 14 = 14
28 – 15 = 13
28 – 16 = 12



Ziel des Zuordnens von Beschreibungen

Im Mittelpunkt steht die Sprachrezeption, da die Kinder das vorgegebene Sprachprodukt nachvollziehen und begründet einer Abbildung/Aufgabe zuordnen sollen, um …

- die Wichtigkeit einer gemeinsamen Sprache beim Mathematiklernen erfahrbar zu machen.
- weitere sprachliche Vorbilder (in Form von Texten) für die eigenen Beschreibungen zu erhalten.
- neue Denkweisen kennenzulernen.
- zum genauen Lesen und Nachdenken anzuregen.

Beispielhafte Impulse

- Welche Beschreibung passt? Woran hast du das erkannt?
- Was ist in den Beschreibungen gleich?
- Wie unterscheiden sich die Beschreibungen?
- Wo siehst du das Beschriebene im Bild? Zeige.
- Warum passt die andere Beschreibung nicht?

Beschreibungen zuordnen

Unterstützungsangebote für das Zuordnen von Beschreibungen

- Leseanforderungen entlasten, z. B. durch den Einsatz von Aufnahmemedien (Audiodatei auf einem Endgerät, Audiostift, …)
- das Gemeinsame in den Fokus rücken, z. B. die Aussagen mit den gleichen Farben markieren
- Komplexität erhöhen, z. B. komplexere Beschreibungen, größere Anzahl an Beschreibungen, mehr Zuordnungsmöglichkeiten

Wichtiges

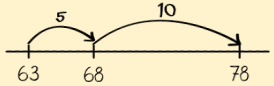
- Die vorgegebenen Beschreibungen können auch auf *Vollständigkeit*, *Verständlichkeit* oder *Fachsprache* reflektiert und dadurch als Sprachvorbilder genutzt werden („Warum konntest du die Beschreibung gut verstehen und zuordnen?“).
- Für eigene Beschreibungen ist es oft eine große Hilfe, sich an einem sprachlichen Vorbild orientieren zu können. Neben den anderen Kindern und der Lehrkraft können dies auch gelungene Beschreibungen sein.
- Das Zuordnen von Beschreibungen kann als Anlass genutzt werden, um über mathematische Beschreibungen als Textsorte (in Abgrenzung zu Beschreibungen im Fach Deutsch) zu reflektieren. Mathematische Beschreibungen sind …
  - knapp, kurz und auf den Punkt gebracht.
  - übertragbar und verallgemeinerbar.

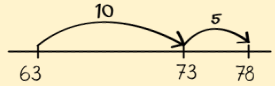
Weitere Anlässe für das Zuordnen von Beschreibungen

Das Bereitstellen von Sprachvorbildern unterstützt die Kinder bei eigenen Sprachproduktionen, z. B. beim …

- Beschreiben von Rechenwegen

Ich rechne in Schritten. Erst die Zehner und dann die Einer. Kreuze an, welches Bild passt.

☐ 

☐ 

- Zuordnen von Fachausdrücken im Kontext geometrischer Formen und Figuren
- Beschreiben von geometrischen und arithmetischen Mustern

Das Grundmuster besteht aus einem blauen Dreieck und 2 roten Kreisen.
Kreuze an, was passt.

☐ 

☐ 

Beschreibungen diskutieren & weiterentwickeln

Was findest du gelungen? Was würdest du verändern?

Anlass: **Schöne Päckchen**

$2 \cdot 8 = 16$
$3 \cdot 8 = 24$
$4 \cdot 8 = 32$
$5 \cdot 8 = 40$

Umut
Die erste Zahl wird 1 größer, die zweite Zahl bleibt gleich. Das Produkt wird immer 8 größer.

Mila
Vorne wird es 2, 3, 4, 5. In der Mitte steht immer eine 8. Hinten ist es aus der Achterreihe.

Anlass: **Aufgaben ableiten**

$14 - 9$

Sina
Ich rechne 14 – 10 und dann plus 1.

Till
Ich rechne 14 minus 10. Dann habe ich einen zu viel weggenommen. Also rechne ich noch plus 1.

Ziel der Diskussion & Weiterentwicklung von Beschreibungen

Hilfreich für die eigene Textproduktion ist der Nachvollzug vorgegebener Beschreibungen. Das Analysieren und Weiterentwickeln vorgegebener Beschreibungen kann ein Anlass sein, um …

- genaues Lesen und Nachdenken anzuregen.
- für Gelungenes und Hilfreiches bei mathematischen Beschreibungen zu sensibilisieren (z. B. Verwendung von Fachsprache, bedeutungsbezogenen Sprachmitteln, Mitteln zum Forschen, präzisen Beschreibungen von Vorgehensweisen).

Beispielhafte Impulse

- Was hat das Kind entdeckt? Sage es mit deinen Worten!
- Ist die Beschreibung genau genug/verständlich? Kannst du die Beschreibung gut verstehen und nachvollziehen?
- Was gefällt dir an der Beschreibung des Kindes? Was fehlt dir in der Beschreibung des Kindes?
- Vergleiche die Beschreibung des Kindes mit deiner Beschreibung!
- Welche Tipps hast du für das Kind, um seine Beschreibung noch besser zu machen?

Beschreibungen diskutieren & weiterentwickeln

Unterstützungsangebote für das Diskutieren & Weiterentwickeln von Beschreibungen

- Gelungenes in den Blick nehmen, z. B. durch die Gegenüberstellung von zwei Beschreibungen zum gleichen Gegenstand
- für noch Fehlendes sensibilisieren
- Wichtigkeit des Einbezugs von Hilfsmitteln erkennen, damit das Entdeckte für andere deutlich wird, z. B. Sprachspeicher mit wichtigen Ausdrücken und Darstellungen, Mittel zum Forschen, didaktische Materialien

Wichtiges

- Die vorgegebenen Beschreibungen können auch auf *Vollständigkeit*, *Verständlichkeit* oder *Fachsprache* reflektiert und dadurch auch als Sprachvorbilder genutzt werden („Warum konntest du die Beschreibung von Umut gut verstehen?“).
- Vorgegebene Beschreibungen und deren Gegenüberstellung dienen als Diskussionsanlass (Was könnte Mila in ihrer Begründung noch deutlicher machen, damit wir besser verstehen, was sie entdeckt hat?“).
- Sie regen dazu an, konkrete Verbesserungen vorzunehmen, z. B.:

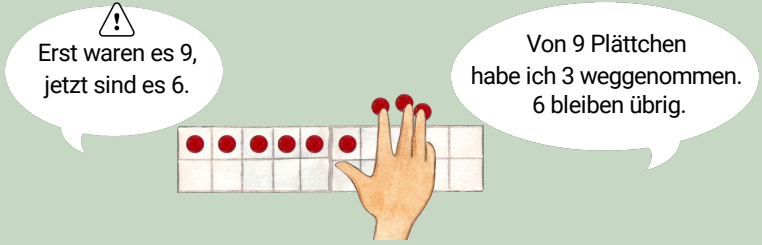
Mila
Vorne wird es 2, 3, 4, 5. In der Mitte steht immer eine 8. Hinten ist es aus der Achterreihe.

Beschreibe die Veränderung der Zahlen genauer.

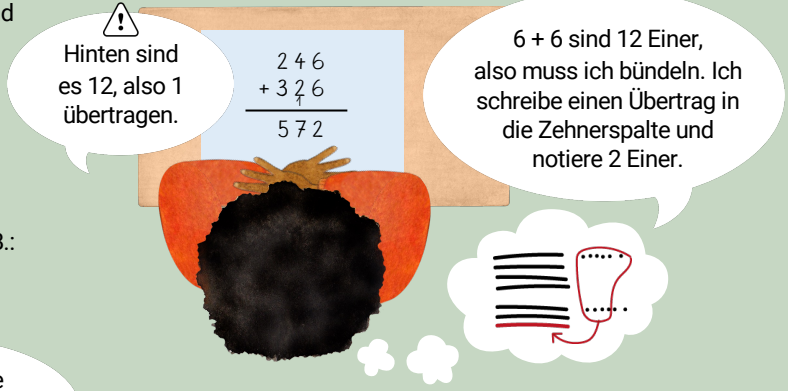
Verwende die Ausdrücke aus unserem Sprachspeicher.

Weitere Anlässe zum Diskutieren & Weiterentwickeln von Beschreibungen

- Beschreibungen von Bildern und Handlungen reflektieren



- Beschreibungen von Vorgehensweisen reflektieren



- Beschreibungen von Zusammenhängen reflektieren (siehe *Analogieaufgaben* unter *Zusammenhänge beschreiben*)

Vorgehensweisen begründen

Warum ist der Weg richtig? Warum hilft er?

Anlass: **Rechenwege**

603 – 598

- Stellenweise
- Schrittweise
- Ergänzen
- Ableiten

Bei dieser Aufgabe ergänze ich, weil 598 und 603 nah beieinander liegen.



Anlass: **Türme bauen**

Baue Vierertürme.

- 4 verschiedene Farben
- Finde alle Türme.
- Warum sind das alle?

Zuerst habe ich Türme gebaut, bei denen der rote Stein unten liegt. Dann …

Aus einem Turm habe ich durch Umdrehen einen zweiten Turm gemacht.



Ziel der Begründung von Vorgehensweisen

Lernende sollten Vorgehensweisen nicht nur kennen, sondern auch begründen, um …

- zu zeigen und zu verstehen, warum sie funktionieren.
- zu erkennen, dass bestimmte, strategische Vorgehensweisen die Bearbeitung des mathematischen Problems erleichtern.
- ein tiefes Verständnis für die Vorgehensweisen zu erlangen (Nicht nur „Wie funktioniert meine Vorgehensweise“, sondern auch „Warum funktioniert sie und warum ist sie geschickt?“).

Beispielhafte Impulse

- Zeige, warum du so vorgehen kannst. (z. B. „Warum ist dein Rechenweg richtig?“)
- Warum kannst du dir sicher sein, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast?
- Warum ist die Vorgehensweise hilfreich, um die Aufgabe zu lösen? (z. B. „Warum ist es hilfreich, eine Farbe für den unteren Stein festzulegen?“)

Vorgehensweisen begründen

Unterstützungsangebote für das Begründen von Vorgehensweisen

- die eigene Vorgehensweise mit Material darstellen und am Material erklären
- wenn Kinder nicht strategisch vorgegangen sind: z. B. bisher gefundene Lösungen ausschneiden, sortieren und davon ausgehend eine geschickte Vorgehensweise entwickeln, die sie dann begründen

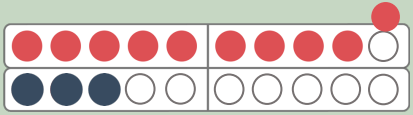
Wichtiges

- Das Begründen von Vorgehensweisen hat nicht zum Ziel, DIE geschickteste Vorgehensweise festzulegen, sondern insgesamt über verschiedene geschickte Vorgehensweisen und deren Unterstützungsfunktion für den Lösungsprozess („Warum hilft der Weg?“) ins Gespräch zu kommen.
- Daher ist das Meta-Gespräch über die Unterstützungsfunktion einer Vorgehensweise wichtig („Warum ist die Vorgehensweise hilfreich, um alle Lösungen zu finden / um nicht so viele Rechenschritte machen zu müssen?“).
- Darüber hinaus stellt das Begründen von Vorgehensweisen ein Verständnis für diese sicher (Nicht nur „Wie kann ich vorgehen?“, sondern vor allem „Warum kann ich so vorgehen?“).

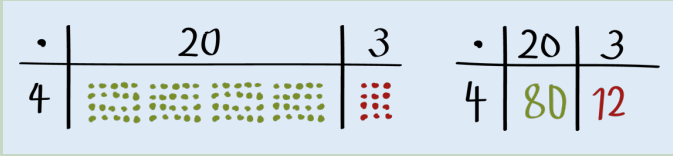
Weitere Anlässe für das Begründen von Vorgehensweisen

Rechenwege begründen, z. B. bei …

- Ableitungen („Für 9 + 3 hilft mir 10 + 3, weil ich dann nur 1 wieder wegnehmen muss.“)



- halbschriftlicher Multiplikation mit dem Malkreuz („Bei der Aufgabe 4 mal 23 zerlege ich die 23 in Zehner und Einer. Das sind 4 Zwanziger und 4 Dreier. Also 80 und 12 sind zusammen 92.“)



- der Erklärung fehlerhafter Rechenwege („Erkläre, warum dieser Rechenweg nicht richtig ist.“)

Problemlösestrategien begründen, z. B. bei …

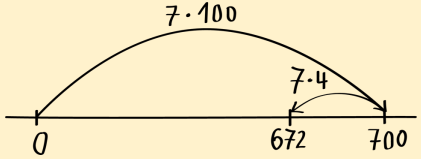
- „Finde alle“-Aufgaben („Finde alle Zahlenmauern mit 6 im Deckstein. Warum ist die Vorgehensweise hilfreich, um alle Zahlenmauern zu finden?“)

Zusammenhänge begründen

Warum passt das?

Anlass: **Rechenwege zuordnen**

$7 \cdot 96 = 672$



Anlass: **Rechenoperationen zuordnen**

20 Kinder sind im Chor. Immer 5 Kinder stehen in einer Reihe.

Auf einem Tisch stehen 20 Flaschen. Lena stellt noch 5 Flaschen dazu.

$20 : 5$

$20 + 5$



Ziel der Begründung von Zusammenhängen

Die Suche nach einer Antwort auf die Frage „Warum passt das?“ fordert nicht nur (oberflächliches), eher prozedurales Beschreiben ein, sondern lässt sich als Gesprächsanlass nutzen, um …

- verschiedene Darstellungen verstehen zu lernen.
- Darstellungen miteinander zu vernetzen.
- mathematische Muster und Strukturen zu durchdringen und ein vertieftes Verständnis zu erlangen.

Beispielhafte Impulse

- Erkläre, warum das passt!
- Woran kannst du erkennen, dass es zusammen passt?
- Zeige uns (am Material, mit einer Zeichnung, …), warum das zusammen gehört!
- Erkläre und zeige uns (am Material, mit einer Zeichnung, …), warum die anderen Beispiele nicht passen!

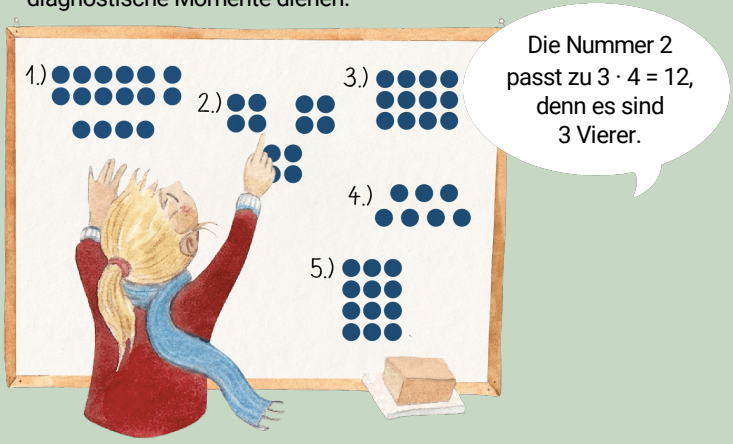
Zusammenhänge begründen

Unterstützungsangebote für das Begründen von Zusammenhängen

- Materialhandlungen einbeziehen, z. B. Zusammenhang von Aufgaben mit Hilfe von anschaulichen Darstellungen verdeutlichen
- den Entstehungsprozess vorgegebener Darstellungen nachvollziehen, z. B. Darstellungen am Rechenstrich gemeinsam nachzeichnen

Wichtiges

Das inhaltliche Verständnis der Kinder wird sichtbar in ihren Antworten auf die Frage „Erkläre, warum es passt!“. Die Antworten der Kinder machen Verstehensgrundlagen, aber auch noch bestehende Verstehenshürden sichtbar und können somit als diagnostische Momente dienen.



Weitere Anlässe für das Begründen von Zusammenhängen

Zusammenhänge in Aufgabenserien erklären, z. B. …

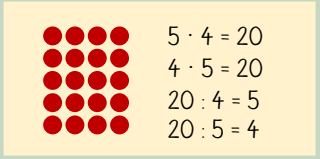
- Warum bleibt das Ergebnis im schönen Päckchen immer gleich?
- Warum wird der Deckstein in der Zahlenmauer immer um 1 größer?

Zahlbeziehungen erklären, z. B. …

- Zahlen verdoppeln und halbieren: „Warum kann ich jede Zahl verdoppeln? Warum kann ich 7 Plättchen nicht in 2 gleich große Hälften zerlegen?“
- Teiler einer Zahl: „Warum kann ich 5 nicht durch 2 teilen, aber 10 schon?“
- Zahlzerlegungen erklären: „Warum sind das alle?“

Zusammenhänge von/in Darstellungen erklären, z. B. …

- die Passung von verschiedenen Aufgaben in anschaulichen Darstellungen erklären.





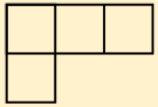
Vollständigkeit begründen

Woran erkennst du, dass das alle sind?



Anlass: **Quadratvierlinge**

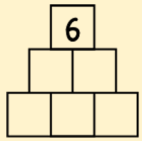
Finde alle Vierlinge.
Gespiegelte und gedrehte Vierlinge sind gleich.



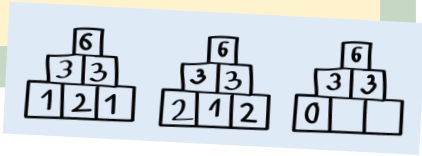
Wie bist du vorgegangen, um alle Vierlinge zu finden?

Anlass: **Zahlenmauern**

Finde alle Zahlenmauern mit dem Deckstein 6.



Woran erkennst du, dass du alle Zahlenmauern mit dem Deckstein 6 gefunden hast?



Ziel der Begründung der Vollständigkeit

„Finde alle"-Aufgaben sind Aufgaben zum Forschen und bieten Anlässe zum Entdecken und Begründen. Kinder werden angeregt, …

- zunehmend vom unsystematischen Probieren (Versuch & Irrtum) zu einem systematischen und geschickten Probieren zu gelangen.
- weitere gefundene Lösungen mit den bereits gefundenen zu vergleichen („Ist das eine neue Lösung?").
- eigene Lösungsstrategien zu entwickeln.
- sich mit anderen Kindern über verschiedene Strategien und deren Eignung auszutauschen.

Beispielhafte Impulse

- Finde viele Lösungen/Möglichkeiten!
- Ordne/sortiere deine Lösungen.
- Wie bist du vorgegangen?
- Welche Strategie hast du gefunden?
- Vergleiche deine Strategie mit einem anderen Kind!
- Wie kannst du (nun) sicher sein, alle Lösungen/Möglichkeiten gefunden zu haben?
- Warum kann es keine weiteren geben?

Vollständigkeit begründen

Unterstützungsangebote für das Begründen der Vollständigkeit

- Erkennen von Zusammenhängen und Beziehungen unterstützen durch …
  - Mittel zum Forschen als Mittel zum Strukturieren, Dokumentieren und Erklären
  - Fragen zum Forschen als Hilfen zum Weiterdenken
  - Strategien zum Forschen als Hilfen zum Weiterlernen (siehe „So forschen wir in Mathe“-Plakat unter *https://pikas.dzlm.de/node/556)*
- Austausch über Strategien unter den Kindern anregen, um Strategien anderen vorzustellen, Strategien von anderen aufzunehmen und gemeinsam neue zu finden
- Anzahl aller Möglichkeiten vorgeben, um eine Zielperspektive zu geben

Wichtiges

Ein erster Zugang zum Finden aller Lösungen ist häufig ein unsystematisches Probieren. Für die Begründung braucht es das Sortieren, um eine Systematik sichtbar zu machen. Im Fokus steht somit nicht die Anzahl der Möglichkeiten, sondern der Lösungsprozess und das stetige Weiterentwickeln der Strategie („Wie kannst du sicher sein …?“, „Wie bist du vorgegangen, um …?“).

Weitere Anlässe für das Begründen der Vollständigkeit

Kombinatorische Probleme, z. B. …

- Händeschütteln: „Wie oft werden Hände geschüttelt?“



- Plättchen in der Stellentafel: „Wie viele verschiedene Zahlen kannst du mit 3 Plättchen legen?“

Geometrische Figuren und Körper, z. B. …

- Würfelgebäude: „Wie viele verschiedene Würfelgebäude kannst du mit 4 Würfeln bauen?“
- Geobrett: „Finde alle Dreiecke.“

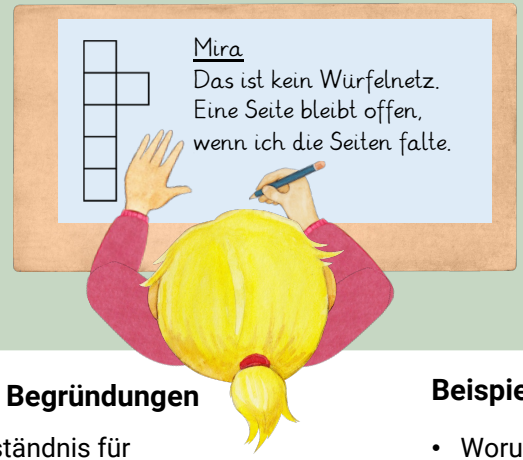
Teilbarkeit, z. B.: „Finde alle Punktefelder, die du mit 24 Plättchen legen kannst.“

Immer verbunden mit den Fragen: „**Wie** kannst du sicher sein, dass …?“, „**Wie** bist du vorgegangen, um …?“

Begründungen nachvollziehen

Was begründen die Kinder?

Anlass: **Würfelnetze**



Anlass: **Rechenstrategien**



Ziel des Nachvollzugs von Begründungen

Im Mittelpunkt steht das Verständnis für Denkwege anderer. Somit sollen die Kinder Begründungen zu Vorgehensweisen, Zusammenhängen oder Darstellungen anderer nachvollziehen, um …

- diese ggf. für das eigene, geschickte Vorgehen zu nutzen.
- die Nachvollziehbarkeit von Begründungen reflektieren zu können.
- zu einem vertieften inhaltlichen Verständnis zu gelangen.

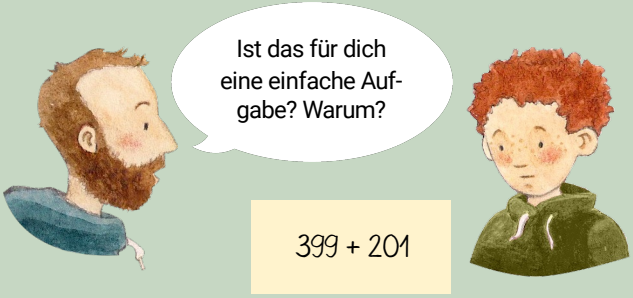
Beispielhafte Impulse

- Worum geht es in der Erklärung? Was wird begründet?
- Was verstehst du gut? Welcher Teil der Erklärung ist dir noch unklar?
- Erkläre es nochmal mit eigenen Worten und am Material.
- Wie kannst du das, was das Kind erklärt, selbst nutzen?
- Hast du genauso erklärt? Vergleiche.

Begründungen nachvollziehen

Unterstützungsangebote für den Nachvollzug von Begründungen

- Aussage(n) am Material nachvollziehen
- Verstandenes in den Blick nehmen, z. B. durch Erklären mit eigenen Worten oder Darstellen mit anderen Darstellungsformen



Wichtiges

Begründungen anderer Kinder und vorgegebene Begründungen …

- vermitteln nicht nur Darstellungs- und Ausdrucksweisen, sondern auch andere Vorstellungsweisen und Konzepte.
- können auch hinsichtlich anderer Kriterien (Fachsprache, Vollständigkeit) reflektiert werden und so als Sprachvorbilder dienen.
- können auch auf andere Kontexte übertragen und verallgemeinert werden.

Weitere Anlässe für den Nachvollzug von Begründungen

Nachvollziehen von Begründungen, z. B. bei …

- Mustern in schönen Päckchen

82 – 20
82 – 30
82 – 40



- Aufgaben zur Division mit Rest

In der Klasse sind 26 Kinder. Immer 4 Kinder sitzen an einem Gruppentisch. Wie viele Tische werden benötigt?

26 : 4 sind 6 Rest 2. Es werden 7 Gruppentische benötigt. Es sind dann aber nur nicht alle Tische voll besetzt.

- Aufgabenpaaren

24 : 6
240 : 6

Es passen 4 Sechser in 24. Dann passen in 240 zehnmal so viele Sechser wie in 24, also 40.

Begründungen identifizieren

Welcher Text erklärt es?

Anlass: **Multiplikation**

Warum passt dieses Bild zur Aufgabe 4 · 5 = 20?



Weil vorne runter sind es 4 und oben gerade sind es 5.

Weil ich hier 4 Fünfer sehe.

Anlass: **Schöne Päckchen**

Warum ist das Ergebnis immer gleich?
Erkläre am Punktebild.

5 + 4 = 9
4 + 5 = 9
3 + 6 = 9
2 + 7 = 9



Weil die 1. Zahl immer 1 kleiner wird und die 2. Zahl immer 1 größer.

Aus einem blauen wird ein rotes Plättchen. Die Anzahl der Plättchen bleibt gleich.

Ziel des Identifizierens von Begründungen

Im Mittelpunkt steht die Sprachrezeption, da die Kinder das vorgegebene Sprachprodukt nachvollziehen und als treffend identifizieren sollen, um …

- eine Begründung von einer Beschreibung unterscheiden zu können.
- eine Aussage als eine verstehensorientierte mathematische Begründung zu erkennen und von der Beschreibung von Oberflächenmerkmalen abgrenzen zu können.
- Qualitäten einer guten Begründung zu erkennen.

Beispielhafte Impulse

- Vergleiche die Aussagen miteinander: Was ist gleich, was ist verschieden?
- Wie würdest du es erklären?
- Sind beide Aussagen richtig?
- Welche Aussage antwortet auf die Frage nach dem „Warum?“
- Was fehlt bei der anderen Aussage?

Begründungen identifizieren

Unterstützungsangebote für das Identifizieren von Begründungen

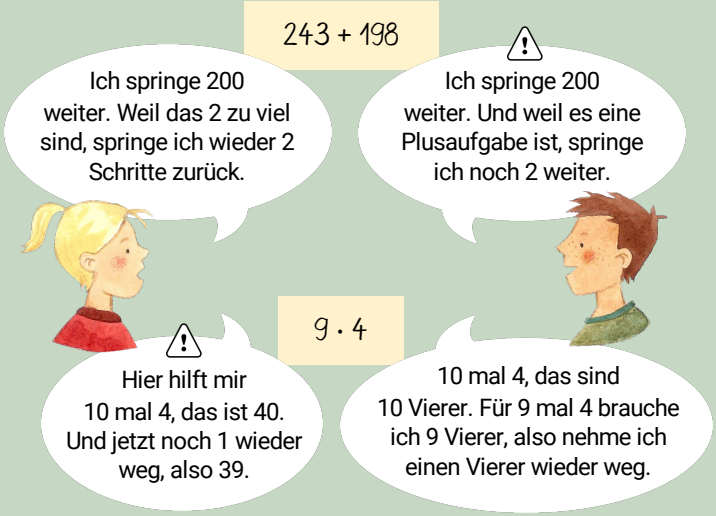
- Aussagen fokussieren, z. B. Begründungen ohne Blick auf die Aufgabe oder Darstellung verstehen: „Schließt die Augen. Ich lese euch die Aussagen vor. Welche Aussage hilft, das ganze Muster / das ganze Bild vorzustellen?“
- Aussagen rückwärts denken und (am Material) nachvollziehen, um eventuelle Widersprüche zu erkennen, z. B. „Zeichnet: Fünf oben, vier nach unten. Vergleicht eure Bilder mit dem Ausgangsbild.“

Wichtiges

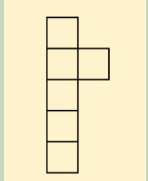
- Gelungene Begründungen können dazu dienen, Vollständigkeit, Verständlichkeit, Fachsprache usw. zu reflektieren („Inwiefern gibt die Aussage eine Antwort auf die Frage nach dem Warum?“).
- Für eigene Begründungen ist es oft hilfreich, sich an einem sprachlichen Vorbild orientieren zu können. Neben den anderen Kindern und der Lehrkraft können dies auch gelungene Begründungen sein.
- Das Zuordnen von Begründungen kann als Anlass genutzt werden, um über mathematische Begründungen als Textsorte (in Abgrenzung zu Begründungen im Fach Deutsch) zu reflektieren. Mathematische Begründungen …
  - gehen über einfache „Weil-Sätze“ und „Wenn-dann-Konstruktionen“ hinaus.
  - drücken sich auch in konkreten Handlungen oder anschaulichen Bildern aus.
  - machen das Allgemeine sichtbar und sind übertragbar.

Weitere Anlässe für das Identifizieren von Begründungen

- Erklären von fehlerhaften und korrekten Rechenwegen



- (Unpassende) Begründungen, die (k)eine inhaltliche Erklärung liefern



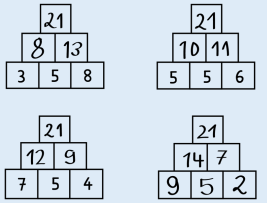
Lea
Es ist kein Würfelnetz, weil dann 2 Quadrate übereinander liegen und links frei bleibt.

Momo
Es ist kein Würfelnetz, weil ich es mit Material probiert habe und es nicht geht.

Begründungen diskutieren & weiterentwickeln

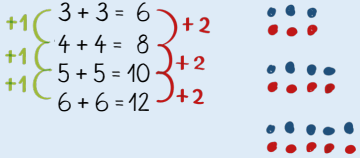
Was ist passend erklärt? Was würdest du verändern?

Anlass: **Zahlenmauern**



Samira
Es ist immer gleich, weil sich unten 2 Zahlen verändern.

Anlass: **Schöne Päckchen**



Paul
Es kommen immer ein rotes und ein blaues Plättchen dazu. Deshalb ist das Ergebnis immer um zwei größer

Ziel des Diskutierens & Weiterentwickelns von Begründungen

Für viele Kinder ist es herausfordernd, sich von einer „beschreibenden Ebene“ zu lösen und die eigenen Entdeckungen auch zu begründen. Ein erster Schritt kann die Analyse vorgegebener Begründungen sein, um …

- zum genauen Lesen und Nachdenken anzuregen.
- für Gelungenes und Hilfreiches bei mathematischen Begründungen zu sensibilisieren (z. B. Verwendung von Fachsprache sowie Mittel zum Forschen, präzise Beschreibungen von Vorgehensweisen, Vernetzung von Darstellungen).

Beispielhafte Impulse

- Was hat das Kind entdeckt? Sage/Erkläre es mit deinen Worten!
- Was gefällt dir an der Erklärung des Kindes? Was fehlt dir in der Erklärung des Kindes?
- Ist die Erklärung genau genug/verständlich? Kannst du die Erklärung gut verstehen?
- Erklärt das Kind, warum seine Entdeckung gilt?
- Welche Tipps hast du für das Kind, um seine Erklärung noch besser zu machen?

Begründungen diskutieren & weiterentwickeln

Unterstützungsangebote für das Diskutieren & Weiterentwickeln von Begründungen

- Gelungenes in den Blick nehmen, z. B. durch die Gegenüberstellung von zwei Begründungen zum gleichen Gegenstand
- für noch Fehlendes sensibilisieren, z. B. Umschreiben oder Ergänzen von Begründungen
- Wichtigkeit des Einbezugs von Hilfsmittel erkennen, damit anderen das Entdeckte deutlich wird, z. B. Sprachspeicher mit wichtigen Ausdrücken und Darstellungen, Mittel zum Forschen, didaktische Materialien

Wichtiges

- Die vorgegebenen Begründungen können auch auf Vollständigkeit, Verständlichkeit, Fachsprache usw. reflektiert und dadurch als Sprachvorbilder genutzt werden („Warum konntest du die Begründung von Paul gut verstehen?“).
- Vorgegebene Begründungen und deren Gegenüberstellung …
  - dienen als Diskussionsanlass: „Was könnte Samira in ihrer Begründung noch deutlicher machen, damit wir besser verstehen, was sie entdeckt hat?“
  - regen dazu an, konkrete Verbesserungen vorzunehmen.

Samira
Es ist immer gleich, weil sich unten 2 Zahlen verändern.

Wie genau verändern sich die Zahlen?

Kannst du mir deine Entdeckung am Material zeigen?

Weitere Anlässe für das Diskutieren & Weiterentwickeln von Begründungen

- Begründungen von Vorgehensweisen reflektieren

Bei dieser Aufgabe ergänze ich, weil 598 und 603 nah beieinander liegen.

603 + 598

Ich rechne hier schriftlich, weil die Zahlen so groß sind.

- Begründungen von Zusammenhängen reflektieren

Weil immer die Zahlen 4, 5 und 20 vorkommen.

Warum passen alle Aufgaben zum Punktebild?

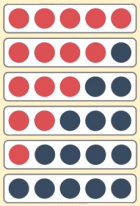


$5 \cdot 4 = 20$
$4 \cdot 5 = 20$
$20 : 4 = 5$
$20 : 5 = 4$

Weil ich in dem Bild 4 Fünfer und auch 5 Vierer sehen kann.

- Begründungen von Vollständigkeit reflektieren

Warum sind das alle?



Ich drehe immer ein Plättchen um. Am Ende sind alle Plättchen blau. Mehr kann es also nicht geben.



Auf Stimmigkeit prüfen

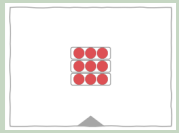
Hier stimmt etwas nicht. Erkläre.

Anlass: **(Fehlerhafte) Rechenwege**

So hat Paul gerechnet.
Stimmt das? Erkläre.

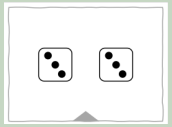
$$16 - 9 = 5$$
$$16 - 10 = 6$$
$$6 - 1 = 5$$

Anlass: **Malquartett**









Ziel des Prüfens auf Stimmigkeit

„Hier stimmt etwas nicht"-Aufgaben haben das Potenzial zum „Stutzigmachen", regen zum kritischen Überprüfen an und können für viele Kinder ein Erstzugang zum Begründen sein. Sie …

- schulen den Blick der Kinder.
- fordern zu einer eigenen inhaltlichen Auseinandersetzung und zum Nachvollzug der Aufgabe auf.
- fordern sowohl zum Beschreiben (Was stimmt hier nicht?) als auch zum Begründen (Warum stimmt das nicht?) auf.
- fordern dazu auf, Verbesserungsvorschläge vorzunehmen.

Beispielhafte Impulse

- Prüfe.
- Was stimmt hier nicht? Woran erkennst du das?
- Zeige (am Material, mit einer Zeichnung, …) was falsch ist.
- Erkläre, warum das nicht stimmt/passt.
- Repariere/Korrigiere den Fehler, damit es richtig wird. Wie müsste es sein, damit es stimmt?
- Erkläre dem Kind, warum es so nicht vorgehen/rechnen kann.

Auf Stimmigkeit prüfen

Unterstützungsangebote für das Prüfen auf Stimmigkeit

- Mittel zum Forschen einbeziehen beim …
  - Identifizieren von Unstimmigkeit, z. B.: „Kreise den Fehler ein.“
  - Prüfen auf Unstimmigkeit, z. B.: „An DIESER Stelle (Stelle wird markiert) stimmt etwas nicht. Warum?“
  - Erklären von Unstimmigkeit, z. B.: „Zeige am Material.“
- Reparierte Lösungen bereitstellen, z. B.: „Warum passt das jetzt?“

Wichtiges

- Um die Kinder der Klasse zu schützen bzw. nicht bloßzustellen, empfiehlt es sich, mit erfundenen/fiktiven Kinderdokumenten zu arbeiten.
- Viele Kinder sind sehr motiviert, sich mit fehlerhaften Lösungen auseinanderzusetzen. Sie schlüpfen damit quasi in die Rolle der Lehrkraft und dürfen Korrekturen vornehmen. Zudem schafft das eine gewisse Fehlertoleranz („Aus Fehlern können wir lernen.“).
- Oftmals ist es für Kinder einfacher, zu begründen, warum etwas NICHT stimmt, statt zu begründen, warum etwas stimmt („Das stimmt nicht, weil…“, „So müsste es sein, damit es stimmt.“).

Weitere Anlässe für das Prüfen auf Stimmigkeit

Gute Anlässe für das Überprüfen auf Stimmigkeit sind gegeben, wenn sowohl sprachliche als auch fachliche Kompetenzen beim Korrigieren notwendig sind.

Vorgehensweisen/Rechenwege überprüfen, z. B.:

- Warum ist die Vorgehensweise/der Rechenweg nicht richtig?

Zusammenhänge verschiedener Darstellungen überprüfen („Warum passt es nicht zusammen?“), z. B.:

- Strichliste und Säulendiagramm
- Bauplan und Würfelgebäude
- Halbschriftlicher Rechenweg und anschauliche Darstellung
- Faltschnitt und Figur

Kannst du dieses Haus durch einen Faltschnitt erzeugen?



- Ergebnisse von Sachaufgaben überprüfen

Tim hat 5 Bonbons. Ella hat auch Bonbons und gibt Tim 3 davon ab. Wie viele Bonbons hat Tim jetzt?

Tim hat 2 Bonbons.
3 wurden abgegeben.

Tim hat 8 Bonbons.
Er hat 3 bekommen.

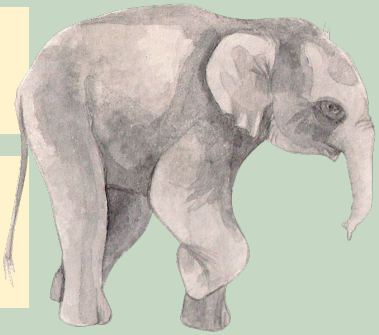
Aussagen überprüfen

Stimmt das? Erkläre.

Anlass: **Größenvorstellung**

Ein Tornister wiegt etwa 50 kg.

Ein Elefantenbaby wiegt bei der Geburt 50 g.



Anlass: **(fehlerhafte) Zeitungstexte**

1000. Sendung

Heute wird zum 1000. Mal die Kindersendung *Checker* ausgestrahlt. Sie läuft seit knapp 10 Jahren einmal pro Woche, jeweils am Donnerstagnachmittag.

Ziel des Überprüfens von Aussagen

Bei „Stimmt das?"-Aufgaben (auch „Kann das stimmen?"-Aufgaben genannt) sollen mathematische (Sach-)Texte begründet auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden. Daher regen sie dazu an, …

- einen kritischen Blick auf mathematische Aussagen zu werfen und diese auf Plausibilität zu prüfen.
- sinnvoll Annahmen zu machen.
- Daten und Zahlen zu schätzen, zu überschlagen und ggf. noch fehlende zu recherchieren.
- Stützpunktvorstellungen und (mathematisches) Wissen zu aktivieren.

Beispielhafte Impulse

- Erkläre, warum die Aussage stimmt oder nicht stimmen kann.
- Erkläre, was genau (nicht) stimmen kann.
- Verändere den Text so, dass er nun stimmt.
- Vergleiche deinen Lösungsweg mit dem eines anderen Kindes.
- Welche Informationen fehlen dir, um den Text zu überprüfen? Woher kannst du sie bekommen?

Aussagen überprüfen

Unterstützungsangebote für das Überprüfen von Aussagen

- Das Erfassen des Texts unterstützen, z. B. durch …
  - Markieren wichtiger Informationen.
  - Vereinfachen des Texts (wenige Zahlen, leicht verständlicher Sachverhalt, einfache mögliche Überschläge).
  - Anfertigen einer Zeichnung/Situationsskizze/Tabelle etc.

Wichtiges

- Bei der Formulierung „Kann das stimmen?“ kann es schnell passieren, dass die Kinder nicht zwingend mathematisch antworten, sondern sachlogisch überlegen, ob unter besonderen Umständen die Aussage doch stimmen könnte („Ja, alle Tornister können zusammen 500 kg wiegen, denn ich weiß ja nicht, was die anderen Kinder mitschleppen.“).
- „Stimmt das?“-Formulierungen erlauben die Übertragung auf andere mathematische Texte, die nicht zwingend Sachtexte sein müssen (siehe nebenstehende Beispiele).
- Eigenproduktionen können eine Möglichkeit zur Weiterarbeit sein: Die Lernenden erfinden eigene „Stimmt das?“-Aufgaben, die dann von anderen Kindern bearbeitet werden.

Weitere Anlässe für das Überprüfen von Aussagen

Das Überprüfen von Aussagen kann nicht nur dazu dienen, Sachtexte auf Wahrheitsgehalt zu überprüfen, sondern kann auch auf mathematische Aussagen allgemeiner Art übertragen werden, z. B. im Kontext …

- mathematischer Knobeleien.

Ein Bauer hat Katzen und Pferde. Er zählt 22 Beine.	Ein Bauer hat Kühe und Hühner. Es sind 18 Beine und 6 Köpfe. 5 Tiere sind Kühe.

- geometrischer Texte.

Jedes Dreieck hat einen rechten Winkel.	Dreiecke haben niemals 2 rechte Winkel.

- von Tabellen und Diagrammen.

Das Säulendiagramm zeigt, dass in allen vierten Klassen gleich viele Kinder sind.	Aus der Tabelle erkenne ich, dass in allen vierten Klassen mehr als 250 Kinder sind.

- des Umgangs mit Daten der eigenen Klasse.

In unserer Klasse wiegen alle Tornister zusammen mehr als 200 kg.	Alle Kinder unserer Klasse sind zusammen über 30 m groß.

Veränderungen beschreiben & begründen

Was wäre, wenn …?

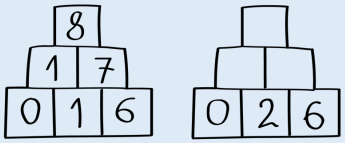
… dein Haus so aussehen würde?

Anlass: **Funktionalität und Zweckmäßigkeit geometrischer Körper**



… der mittlere Grundstein sich verändert?

Anlass: **Zahlenmauern**



Ziel des Beschreibens & Begründens von Veränderungen

„Was wäre, wenn …?“-Aufgaben (oder auch „Was passiert mit …, wenn …?“-Aufgaben) regen dazu an, den Anfangs- und Endzustand mathematischer (Alltags-)Situationen miteinander zu vergleichen und langfristig die Auswirkungen von Veränderungen gedanklich vorwegzunehmen. Ziel ist es, …

- Veränderungen zu erkennen („Was ändert sich? Was ändert sich nicht?“).
- Veränderungen zu beschreiben („Wie ändert es sich?“).
- Auswirkungen von Veränderungen zu begründen („Warum ändert es sich? Warum bleibt es gleich?“).

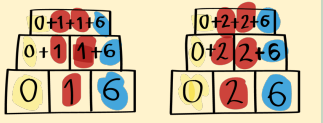
Beispielhafte Impulse

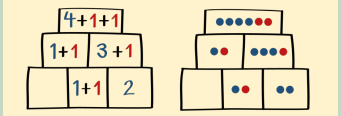
- Was bleibt gleich?
- Was verändert sich?
- Was bewirkt die Veränderung?
- Wie hängen verschiedene Veränderungen zusammen?
- Was passiert mit ..., wenn …?
- Markiere, was sich verändert.
- Beschreibe, wie es sich verändert.
- Erkläre, warum es sich verändert.

Veränderungen beschreiben & begründen

Unterstützungsangebote für das Beschreiben & Begründen von Veränderungen

- Für manche Kinder ist es herausfordernd, Veränderungen z. B. in Aufgabenfolgen wahrzunehmen. Als Unterstützungen sind möglich …
  - Mittel zum Forschen: Hilfen zum Strukturieren, Dokumentieren und Erklären





  - Fragen zum Forschen: unterstützende Fragen als Hilfen zum Weiterdenken

Vergleiche erstmal zwei Mauern: Was bleibt gleich? Was ändert sich?

Betrachte eine Mauer: Wie oft geht der mittlere Stein in die oberen Etagen ein?

Wichtiges

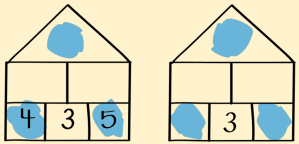
- Das Beschreiben von Veränderungen gelingt vielen Kindern, wenn sie angeregt werden, farbige Markierungen sowie die Fachausdrücke aus einem Sprachspeicher zu nutzen.
- Für das Begründen werden anschauliche Darstellungen z. B. unter Einsatz von Plättchen oder aber auch formale Darstellungen durch das Begründen über Terme notwendig.

Weitere Anlässe für das Beschreiben & Begründen von Veränderungen

Ergiebige Aufgaben bzw. Aufgabenformate, z. B. …

- das Mal-Plus-Haus

Was wäre, wenn du die linke und die rechte Grundzahl vertauschst? Was passiert mit der Zielzahl?



Es bleiben 9 Dreier, denn …



Operative Veränderungen, z. B. …

- am Geobrett

Was passiert mit dem Dreieck, wenn du eine Seite umspannst? Welche Dreiecke entstehen?



- an Aufgabenpaaren

Was wäre, wenn du bei einer Minusaufgabe beide Zahlen um 2 verkleinerst?

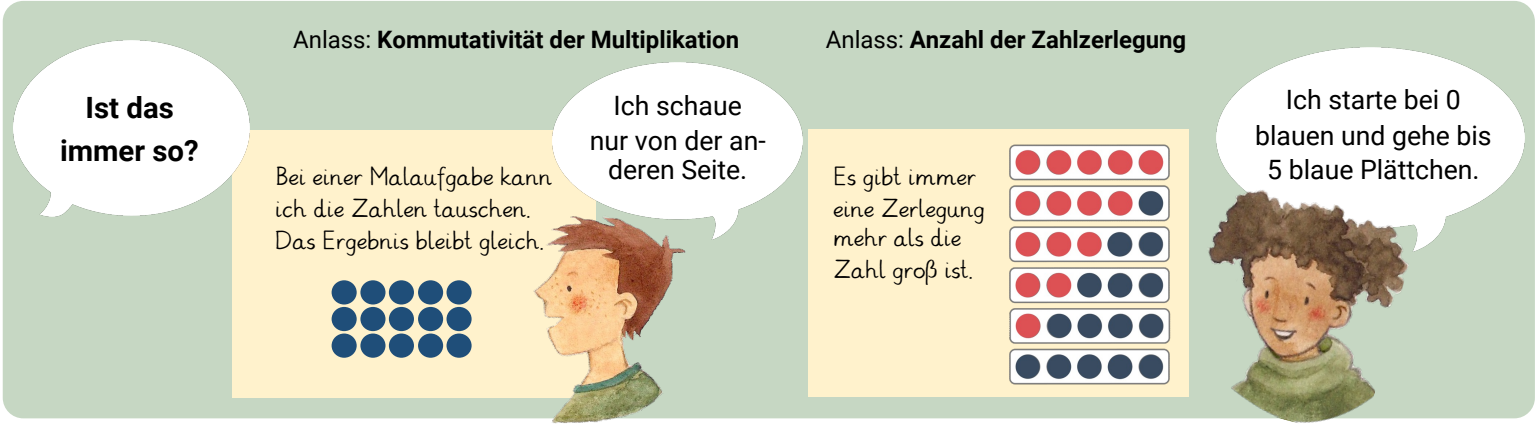
76 – 54

74 – 52

Der Unterschied bleibt gleich, da …



Aussagen verallgemeinern



Ziel des Verallgemeinerns von Aussagen

„Ist das immer so?"-Aufgaben fordern dazu auf, mathematische Aussagen zu hinterfragen und ihren Wahrheitsgehalt zu überprüfen. Dabei lösen sich die Lernenden zunehmend vom Einzelfall und greifen zur Verallgemeinerung auf Darstellungen zurück. Ziel ist es, …

- im Konkreten und Beispielhaften das Allgemeine zu sehen.
- ein tieferes Verständnis für mathematische Gesetzmäßigkeiten zu entwickeln.
- das Bedürfnis zum Weiterdenken zu stärken.
- das algebraische Denken der Kinder zu fördern/anzubahnen.

Beispielhafte Impulse

- Finde passende Beispiele (bei denen die Aussage gilt)!
- Welche Gemeinsamkeiten erkennst du? Lege mit Material!
- Was ist am Material immer gleich, auch bei verschiedenen Beispielen und unterschiedlich großen Zahlen?
- Prüfe die Behauptung auch mit großen Zahlen!
- Treffen deine Entdeckungen immer zu?
- Warum stimmt das? Stimmt das wirklich immer?

Aussagen verallgemeinern

Unterstützungsangebote für das Verallgemeinern von Aussagen

- Das Konkrete gemeinsam in den Blick nehmen, z. B.:
  - die *Aussage* auf geeignete, repräsentative Beispiele übertragen
  - die *Beispiele* am Material selbst darstellen
- Das Konkrete auf das Allgemeine übertragen, z. B.:
  - Gemeinsamkeiten am Material erkennen und benennen
  - Finden und Nutzen mathematischer Muster in Handlungen oder Darstellungen und somit Loslösung vom Einzelfall
  - die in Handlungen und Darstellungen gemachten Entdeckungen auf die symbolische Ebene übertragen

Wichtiges

- Auch ein anschaulicher Beweis ist ein vollwertiger Beweis, wenn am Konkreten das Allgemeine deutlich wird, also der „mathematische Kern" des Sachverhalts korrekt wiedergegeben wird. Anschauliche Beweise …
  - greifen in ihrer Argumentation auf Handlungen oder Zeichnungen zurück.
  - basieren auf Beispielen, die für den allgemeinen Fall repräsentativ sind.
- Möglich ist es, Aussagen vorzugeben, die nicht allgemeingültig sind und daher durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden können.

Wenn 3 die Einerziffer einer Zahl teilt, dann teilt sie auch die gesamte Zahl.

Weitere Anlässe für das Verallgemeinern von Aussagen

Rechengesetze, z. B. …

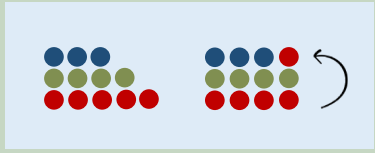
- Kommutativität der Addition und Multiplikation
- Distributivgesetz beim Ableiten von Malaufgaben
- Konstanzgesetze bei schönen Päckchen

Figurierte Zahlen, z. B. „Aus wie vielen Quadraten besteht die 10. Dreieckszahl?"



Operative Folgen, z. B. Summen aufeinanderfolgender Zahlen

Die Summe aus 3 aufeinanderfolgenden Zahlen ist durch 3 teilbar.
Beispiel: 3 + 4 + 5 = 12



Eigenschaften von geometrischen Formen, z. B.:
„Jeder Würfel ist ein Quader", „Jedes Quadrat ist ein Rechteck."

